Successione di Fibonacci e sezione aurea

Alessandro Giacchetto

alessandro.giacchetto@gmail.com

Siano $a_1, \dots, a_n$ numeri reali. Dimostrare che

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}} = \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

dove

$$F_k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{k-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_k \end{vmatrix}.$$

Considera poi la successione data da $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Avremo la *frazione continua*

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = \lim_n \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Dimostrare che la successione F_n soddisfa la seguente relazione di ricorsione:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 3, \\ F_1 = 1, \; F_2 = 2. \end{cases}$$

Tale successione è chiamata *successione di Fibonacci*. Mostrare che

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare A^n utilizziamo la diagonalizzazione di matrici (gli autovalori sono $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$) e trovare la matrice S del cambiamento di base. Per rendere i conti più facili, consiglio di scegliere gli autovettori in modo tale che

$$S = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostrare infine che

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

e provare con tale formula che

$$\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

Tale numero è detto *sezione aurea*. Abbiamo quindi provato che

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$