Forma di Jordan

Alessandro Giacchetto

alessandro.giacchetto@gmail.com

Teorema di Jordan. Sia $A \in M(n \times n, K)$ una matrice triangolarizzabile. Allora A è simile ad una matrice di Jordan J: esiste $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ tale che

$$S^{-1}AS = J.$$

Inoltre e tale matrice è unica, a meno di permutazione dei blocchi.

Vediamo come procedere nella determinazione della matrice di Jordan J e della matrice del cambiamento di base S. Innanzitutto una matrice A è triangolarizzabile se e solo se il polinomio caratteristico è prodotto di fattori lineari:

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_r - x)^{\alpha_r}.$$

Abbiamo quindi determinato la molteplicità algebrica $m_{\mathrm{a}}(\lambda_i) = \alpha_i$. *La molteplicità algebrica è pari al numero di volte che l'autovalore corrispondente comparirà sulla diagonale della forma canonica.* A questo punto, passiamo a calcolare la molteplicità geometrica:

$$m_{\mathrm{g}}(\lambda_i) = \dim \ker (A - \lambda_i E_n).$$

Abbiamo che *il numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore λ_i sono esattamente pari alla molteplicità geometrica $m_{\mathrm{g}}(\lambda_i)$.*

In generale, si hanno due possibilità.

- Molteplicità geometrica e algebrica coincidono: $m_{\mathrm{g}}(\lambda_i) = m_{\mathrm{a}}(\lambda_i)$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Allora la matrice è diagonalizzabile e la matrice di Jordan sarà

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boxed{\lambda_1} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \boxed{\lambda_r} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

- La molteplicità geometrica è strettamente minore di quella algebrica: $m_{\mathrm{g}}(\lambda_i) < m_{\mathrm{a}}(\lambda_i)$ per qualche $i = 1, \dots, r$.
  In certi casi particolari, questo ci permette di scrivere direttamente la forma canonica, senza ulteriori calcoli. Ad esempio, se $\alpha_i = m_{\mathrm{a}}(\lambda_i) = m_{\mathrm{g}}(\lambda_i) + 1$, allora il la parte relativa all'autovalore λ_i avrà necessariamente $\alpha_i - 1$ blocchi di dimensione 1 ed un solo blocco di dimensione 2:

$$J = \begin{pmatrix} \ddots &&&&& \\ & \boxed{\lambda_i} &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& \boxed{\lambda_i} && \\ &&&& \begin{array}{|cc|} \hline \lambda_i & \\ 1 & \lambda_i \\ \hline \end{array} & \\ &&&&& \ddots \end{pmatrix}$$

Vediamo ora come calcolare nel secondo caso il numero di blocchi di Jordan e la matrice S del cambio di coordinate. L'algoritmo si applica su ogni autovalore separatamente, andando a trovare dei vettori per una base dell'autospazio generalizzato

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{g}}(\lambda_i) = \ker{(A - \lambda_i E_n)^{\alpha_i}},$$

che ha dimensione α_i. Fissiamoci sull'autovalore λ_i e chiamiamo $B = A - \lambda_i E_n$. Abbiamo che $\ker B \subset \ker B^2 \subset \ker B^3 \subset \cdots$, poiché

$$v \in \ker B^m \qquad \Longrightarrow \qquad B^{m+1}v = B\,\underbrace{(B^m v)}_{=0} = B0 = 0.$$

Ora, lo spazio ambiente ha dimensione finita, quindi le inclusioni non possono essere sempre strette. Ci sarà quindi una potenza k tale che $\ker B^k = \ker B^{k+1}$.

1. Selezioniamo delle basi come segue:

$$\begin{aligned}
&w_1, \dots, w_{l_1} \text{ base di } \ker B \\
&w_1, \dots, w_{l_1}, w_{l_1+1}, \dots, w_{l_2} \text{ base di } \ker B^2 \\
&\qquad \vdots \\
&w_1, \dots, w_{l_1}, w_{l_1+1}, \dots, w_{l_2}, w_{l_2+1}, \dots, w_{l_k} \text{ base di } \ker B^k.
\end{aligned}$$

   Nota: qui $l_1 < l_2 < \cdots < l_k$.

2. Iniziamo a costruire una base di $\mathrm{Aut}_{\mathrm{g}}(\lambda_i)$. Selezioniamo come primo vettore $v_1 = w_{l_k}$ e costruiamone altri risalendo con B:

$$\begin{aligned}
v_1 &= w_{l_k} \in \ker B^k \\
v_2 &= Bv_1 \in \ker B^2 \\
&\ \ \vdots \\
v_k &= Bv_{k-1} = B^{k-1}v_1 \in \ker B.
\end{aligned}$$

   Ripeto quindi il procedimento per $v_{k+1} = w_{l_k - 1}$:

$$\begin{aligned}
v_{k+1} &= w_{l_k-1} \in \ker B^k \\
v_{k+2} &= Bv_{k+1} \in \ker B^2 \\
&\ \ \vdots \\
v_{2k} &= Bv_{k-1} = B^{k-1}v_{k+1} \in \ker B.
\end{aligned}$$

   E così via, fino ad arrivare a $w_{l_{k-1}+1}$, ovvero il primo vettore della base in $\ker B^k \setminus \ker B^{k-1}$.

3. Se i vettori ottenuti formano già una base di $\mathrm{Aut_g}(\lambda_i)$, ci possiamo fermare. Altrimenti continuiamo con $\ker B^{k-1}$. Ora, abbiamo appena ottenuto dei vettori in $\ker B^{k-1}$: questi sono $v_2, v_{k+2}, \ldots$ Tuttavia abbiamo già una base $w_1, \ldots, w_{l_1}, \ldots, w_{l_{k-1}}$ di $\ker B^{k-1}$. Per il teorema di prolungamento ad una base, possiamo prolungare $v_2, v_{k+2}, \ldots$ ad una base di $\ker B^{k-1}$. Ripetiamo ora il procedimento del punto (2) con i vettori aggiunti.

4. Se non abbiamo ancora una base, si passa poi a $\ker B^{k-2}$ eccetera, fino ad arrivare, se necessario, a $\ker B$. In questo modo, avremo costruito una base $v_1, \ldots, v_{\alpha_i}$ di $\mathrm{Aut_g}(\lambda_i)$. La matrice di Jordan si otterrà quindi come

$$
J - \lambda_i E_n = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}
\begin{array}{l} v_1 \\ Bv_1 = v_2 \\ \vdots \\ B^{k-2}v_1 = v_{k-1} \\ B^{k-1}v_1 = v_k \end{array}
\\
\begin{matrix} Bv_1 & B^2v_1 & \cdots & B^{k-1}v_1 & B^k v_1 \\ \| & \| & & \| & \| \\ v_2 & v_3 & & v_k & 0 \end{matrix}
\end{array}
$$

5. Le colonne della matrice S saranno semplicemente i vettori delle basi di $\mathrm{Aut_g}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{Aut_g}(\lambda_r)$.

Vediamo alcuni esempi.

- Prendiamo
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Il polinomio caratteristico è $p_A(x) = (1-x)^3$, da cui un autovalore di molteplicità algebrica $m_{\mathrm{a}}(1) = 3$. La molteplicità geometrica sarà data dal nucleo di
$$B = A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
che ha dimensione 2. L'unica forma di Jordan possibile (a meno di permutazioni) che presenta due blocchi ed il solo autovalore $\lambda = 1$ è quindi
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Procediamo comunque a calcolare la matrice S. Dal punto (5), otteniamo che le colonne di S sono la base di $\mathrm{Aut_g}(1)$, costruita nei punti (1-4). Selezioniamo innanzitutto una base di $\ker B$:
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Avremo poi una base di $B^2 = 0$ data da
$$w_1, w_2, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Procediamo col punto (2). Poniamo $v_1 = w_3$,

$$v_2 = Bv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $B^2 = 0$, ci fermiamo. Poiché abbiamo completato i vettori della base che stanno in $\ker B^2 \setminus \ker B$, passiamo al punto (3). Il vettore v_2 è esattamente pari a w_1, quindi possiamo sostituirlo nella base di $\ker B$, ottenendo la nuova base v_2, w_2. A questo punto, non rimane che porre $v_3 = w_2$ e abbiamo trovato la base di $\mathrm{Aut_g}(1)$ come nell'algoritmo. Come avevamo già dedotto, la matrice di Jordan sarà data da

$$J - E_3 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ Bv_1 = v_2 \\ v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} Bv_1 & B^2 v_1 & Bv_3 \\ \| & \| & \| \\ v_2 & 0 & 0 \end{matrix} & \end{array}$$

La matrice S del cambiamento di base è invece

$$S = \big(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Prendiamo ora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è ancora $p_A(x) = (1-x)^3$, da cui un autovalore di molteplicità algebrica $m_{\mathrm{a}}(1) = 3$. La molteplicità geometrica sarà data dal nucleo di

$$B = A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha dimensione 1. L'unica forma di Jordan possibile (a meno di permutazioni) che presenta un solo blocco ed il solo autovalore $\lambda = 1$ è quindi

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Procediamo comunque a calcolare la matrice S. Dal punto (5), otteniamo che le colonne di S sono la base di $\mathrm{Aut_g}(1)$, costruita nei punti (1-4). Selezioniamo innanzitutto una base di $\ker B$:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avremo poi una base di

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

data da

$$w_1, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine una base di $B^3 = 0$ è data da

$$w_1, w_2, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Procediamo col punto (2). Poniamo $v_1 = w_3$,

$$v_2 = Bv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = B^2 v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo trovato la base di $\mathrm{Aut}_{\mathrm{g}}(1)$ come nell'algoritmo. Come avevamo già dedotto, la matrice di Jordan sarà data da

$$J - E_3 = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ Bv_1 = v_2 \\ B^2 v_1 = v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} Bv_1 & B^2 v_1 & B^3 v_1 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ v_2 & v_3 & 0 \end{matrix} & \end{array}$$

La matrice S del cambiamento di base è invece

$$S = \big(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$