Rotazioni nel piano

Alessandro Giacchetto

alessandro.giacchetto@gmail.com

Cerchiamo di provare che la rotazione nel piano $\mathbb{R}^2$ di un angolo θ è un'applicazione lineare, la cui matrice associata alle basi canoniche è

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Prendiamo un vettore $v = (x\ y) \in \mathbb{R}^2$. In coordinate polari, questo sarà identificato da una distanza r dall'origine e da un angolo α come in figura. In particolare,

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha. \end{cases}$$

La rotazione di v attorno all'origine di un angolo θ ci darà un nuovo vettore $v' = (x'\ y')$, identificato dalla stessa distanza r dall'origine e da un angolo pari ad $\alpha + \theta$:

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\sin(\alpha+\theta). \end{cases}$$

Possiamo riscrivere x' ed y' in termini di x ed y utilizzando le formule di addizione per seno e coseno:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\theta) &= \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta \\ \sin(\alpha+\theta) &= \cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x' = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ y' = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

In forma matriciale, troviamo proprio l'azione di R_θ:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$