Tutorato di Geometria

Alessandro Giacchetto

alessandro.giacchetto@gmail.com

Indice

1 Foglio 1: Spazi vettoriali, campi, dipendenza lineare

Esercizio 1. L'insieme

$$S = \{\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\ \}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$? Perché?

Ripetere l'esercizio precedente con l'insieme

$$S' = \{\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\ \}.$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali:

$$\mathbb{R}[x] = \{\ a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \ \big|\ d \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\ \}.$$

Proporre una definizione di somma e moltiplicazione per scalare, in modo tale da rendere $\mathbb{R}[x]$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Fissato $n \in \mathbb{N}$, considerare l'insieme

$$\mathbb{R}_n[x] = \{\ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\ \},$$

ovvero i polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$ (NB: il grado può essere $\leq n$ se $a_n, a_{n-1}, \ldots$ sono nulli). Verificare che $\mathbb{R}_n[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Cosa succederebbe se sostituissimo $\mathbb{R}$ con un generico campo K?

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}_+ = \{\ x \in \mathbb{R} \mid x > 0\ \}$. Per ogni, $x \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo la somma e la moltiplicazione per scalare come

$$x \oplus y = x \cdot y, \qquad \lambda x = x^\lambda,$$

dove $\cdot$ indica l'usale moltiplicazione tra numeri reali. Mostrare che $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \oplus)$ è uno spazio vettoriale.

Esercizio 4. Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, 1, 2, 1), \quad v_2 = (2, 5, 7, 5),$$

$$v_3 = (-3, -2, t-5, t-2), \quad v_4 = (-1, -2t-1, -2t-2, -3),$$

determinare i valori del parametro reale t per i quali v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

Esercizio 5. Fissato un numero primo p, considera un elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$.

- Dimostrare che l'applicazione $\phi\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, definita da $\phi(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x}$, è iniettiva.
- Dimostrare poi che ogni elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$ ha un elemento inverso rispetto al prodotto.

Esercizio 6. Sia K un campo. Per un numero naturale n, sia

$$n1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ volte}}$$

dove 1 è l'elemento neutro di K rispetto al prodotto. Si definisce la caratteristica del campo K come zero se $n1 \neq 0$ per tutti gli $n \geq 1$, altrimenti il più piccolo $n \geq 2$ tale che $n1 = 0$ (per esempio, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ hanno caratteristica zero, il campo finito $\mathbb{Z}_p$ ha caratteristica p).

- Dimostrare che la caratteristica di un campo K è zero o un numero primo.
- Dimostrare che la caratteristica di un campo finito non è zero (e quindi è un numero primo).

Esercizio 7. Sia $V = (\mathbb{Z}_2)^n$, ovvero lo spazio delle n-uple sul campo $\mathbb{Z}_2$.

- Quanti elementi diversi possiede V?
- Determina una base $\mathcal{B}$ di V.
- Scrivi ogni altro vettore di V come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$.

- Nel caso $V = (\mathbb{Z}_p)^n$?

Esercizio 8. Considera il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$S_x = \left\{ (1,0), x \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Per quali x l'insieme S_x forma una base di $\mathbb{R}^2$?

Ripetere il ragionamento in $\mathbb{R}^3$, con

$$S'_x = \left\{ (1,0,0), (0,1,0), x \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Esercizio 9 $(*)$**.** Sia $V_n = (\mathbb{Z}_2)^n$. Scrivi ogni possibile base di V_1, V_2. Quante basi possiedono V_3 e V_4? Congettura il numero di basi per il generico V_n. Generalizza al caso $(\mathbb{Z}_p)^n$.

Esercizio 10. Sia $w_1, \dots, w_m$ una base del sottospazio W di V e $w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_r$ un prolungamento ad una base di V. Dimostrare che $[v_1], \dots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W (vd. esercizio 3, foglio 1 del prof. Zimmermann).

2 Foglio 2: Dipendenza lineare, matrici e applicazioni lineari

Esercizio 11. Dimostrare che il prodotto cartesiano $V \times W$ di due K-spazi vettoriali V e W è un K-spazio vettoriale, con la seguente somma e moltiplicazione scalare:

$$\begin{aligned}
&(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2),\\
&\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).
\end{aligned}$$

Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di V e $w_1, \ldots, w_m$ una base di W, dimostrare che $(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_m)$ è una base di $V \times W$.

Esercizio 12. Risolvere il seguente sistema omogeneo nelle variabili (x, y, z, w):

$$\begin{cases} x + 2y + w = 0 \\ 2x + 5y + 4z + 4w = 0 \\ 3x + 5y - 6z + 4w = 0. \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni anche in forma vettoriale.

Esercizio 13. Sia $t \in \mathbb{R}$. Si definisca

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + (t+1)z = t, 2x + y + z = 0 \right\}$$

- Ridurre il sistema a scalini col metodo di Gauss e scrivere la soluzone in forma esplicita.
- Stabilire per quali valori di t l'insieme S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e, per tali valori, scrivere le soluzioni in forma vettoriale.

Esercizio 14. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & t+1 \\ 4 & t-3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t-2 & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

Si dica per quali valori del parametro reale t le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti nello spazio $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

Esercizio 15.

- Siano A, B due matrici $n \times n$ simmetriche. Mostrare che AB è simmetrica se e solo se $AB = BA$.
- Siano A, B due matrici $n \times n$ che commutano, ovvero tali che $AB = BA$. Dimostrare che $A^2B^2 = B^2A^2$, ovvero anche i quadrati commutano. Trovare un esempio in cui il viceversa non vale (provare con le matrici triangolari 2×2).

Esercizio 16. Siano V e W due spazi vettoriali, sia v_1, v_2, v_3, v_4 una base di V e sia w_1, w_2, w_3 una base di W. Indichiamo con $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned}
&f(v_1 - v_3) = w_1 - 2w_2 - 2w_3\\
&f(v_1 - v_2 + v_3) = w_2\\
&f(v_1 + v_3) = w_1 + 2w_2\\
&f(v_1 - v_3 + v_4) = 5w_1 - 4w_3
\end{aligned}$$

- Si dica se f è univocamente determinata dalle condizioni date e si scriva la matrice di f rispetto alle basi date.
- Si determini una base di $\ker(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 17. Sia $V = \mathrm{Appl}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vd. esercizio 2, foglio 1 del prof. Zimmermann). Considerare i sottospazi delle funzioni pari e delle funzioni dispari:

$$\begin{aligned}
V_+ &= \{ f \in V \mid f(x) = f(-x) \}\\
V_- &= \{ f \in V \mid f(x) = -f(-x) \}.
\end{aligned}$$

- Dimostrare che V è somma diretta di V_+ e V_-:
$$V = V_+ \oplus V_-$$
- Considerare l'applicazione $P\colon V \to V$ definita da
$$P(f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$
Provare che P è lineare e che $P^2 = P$.
- In un generico spazio vettoriale V, un'applicazione lineare $P\colon V \to V$ tale che $P^2 = P$ si dice una *proiezione*. Dimostrare che una proiezione P non è invertibile, a meno che $P = \mathrm{id}_V$. Qui id_V indica l'applicazione identità. Cosa si può dire di $Q = \mathrm{id}_V - P$?

Esercizio 18. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ una matrice i cui vettori colonna generano un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione 1. Dimostrare che esistono un vettore colonna e un vettore riga
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = (y_1, \dots, y_n)$$
non nulli tali che $A = xy$, dove il prodotto tra un vettore colonna e un vettore riga è da intendersi nel senso delle matrici. Dedurre che $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$, dove
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$
indica la traccia di A (è il valore che si ottiene sommando gli elementi della diagonale). Provare infine che $A - \lambda I$ è invertibile per ogni $\lambda \neq 0, \mathrm{tr}(A)$. Qui I indica la matrice identità $n \times n$.*

* *Suggerimento:* calcolare il prodotto
$$(A - \lambda I)(A - (\mathrm{tr}(A) - \lambda)I).$$

3 Foglio 3: Matrici e applicazioni lineari

Esercizio 19. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x,y) = (x+y, 2x, x-y)$.

- Verificare che f è lineare.
- Determinare nucleo e immagine di f (scrivere in particolare una base dell'immagine).
- Determinare la matrice A associata ad f (rispetto alle basi canoniche).
- Determinare $f(1,2)$ usando la definizione e usando la matrice A.

Esercizio 20. Stabilire se esiste una applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,2) = (3,0)$, $f(2,7) = (4,5)$, $f(1,5) = (1,4)$.

Esercizio 21. Sia $f\colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ la funzione lineare così definita:

$$f(A) = A - {}^tA.$$

Si determini il nucleo e l'immagine di f. Posto poi $n = 2$, si determini la matrice associata ad f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 22. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $p\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $p \circ p = p$ (una proiezione). Dimostrare che $V = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.

Esercizio 23. Sia $f\colon V \to U$ lineare e $W = \ker(f)$ il nucleo di f. Ricordando la definizione di spazio quoziente V/W, definiamo l'applicazione $\bar{f}\colon V/W \to U$ come $\bar{f}([v]) = f(v)$. Dimostrare che $\bar{f}$ è ben definita (non dipende dal rappresentante), è lineare ed iniettiva.

Esercizio 24 $(*)$**.** Sia $(v_i)_{i \in I}$ una base di uno spazio vettoriale V, per un insieme di indici I arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ tali che $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (vd. esercizio 5, foglio 4 del prof. Zimmermann).

- Dimostrare che i vettori $(v_i^*)_{i \in I}$, sono linearmente indipendenti.[†]
- Dimostrare che i vettori $(v_i^*)_{i \in I}$, generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.

[†] Ricorda che un insieme arbitrario di vettori $(w_i)_{i \in I}$ forma un sistema di vettori linearmente indipendenti se per ogni sottoinsieme finito di indici $J \subset I$, i vettori $(w_i)_{i \in J}$ sono linearmente indipendenti.

4 Foglio 4: Matrici e applicazioni lineari

Esercizio 25. Dire se esiste $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\ker f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \}$,
- $f(1, 1) = (3, 3)$.

In caso affermativo, si trovi la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Determinare inoltre una base dell'immagine.

Esercizio 26. Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali:

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \;\middle|\; d \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, considerare l'insieme

$$\mathbb{R}_n[x] = \{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R} \},$$

ovvero i polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$.

- Verificare che i polinomi $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formano una base di $\mathbb{R}_n[x]$. Dedurne la dimensione.
- Considera l'applizaione lineare $f\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ data da $f(p) = (x - 1)p$. Determinare la matrice di f rispetto alle basi

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{ 1, x, x^2 \} \text{ di } \mathbb{R}_2[x] \\ \mathcal{B}' &= \{ 1, x, x^2, x^3 \} \text{ di } \mathbb{R}_3[x]. \end{aligned}$$

  Verifica che $\mathcal{C} = \{ 2, 2x, 1 + x^2 \}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$ e trova la matrice di f rispetto a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}'$.

Esercizio 27. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2, 1), \qquad v_2 = (1, 1, -1) \qquad v_3 = (1, 1, 3)$$

$$w_1 = (2, 3, -1), \qquad w_2 = (1, 2, 2) \qquad w_3 = (1, 1, -3).$$

Si calcoli la dimensione degli spazi $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$. Si calcoli poi una base di $V \cap W$.

Esercizio 28. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva e sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V. Dimostrare che $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f \subset W$.

Esercizio 29. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$ data da

$$f(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A + A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se ne calcoli il rango.

Esercizio 30 $(*)$**.** Sia $V = \mathbb{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$. Siano $a_1, \ldots, a_{n+1}$ numeri reali distinti e definiamo $\phi_i\colon V \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita da

$$\phi_i(p) = p(a_i), \qquad p \in V,$$

dove $p(a_i)$ è la valutazione del polinomio p in a_i. Notare che $\phi_i \in V^*$. Dimostrare che $\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}$ formano una base di V^*. Ricorda che nell'esercizio 2 hai calcolato la dimensione di tale spazio.[†]

[†] *Suggerimento:* nel foglio 4, esercizio 5.i) del prof. Zimmermann avete dimostrato che, per uno spazio di dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$. É quindi sufficiente dimostrare che i ϕ_i sono linearmente indipendenti. Per fare ciò, considerare i polinomi $p_k(x) = \prod_{i \neq k} (x - a_i)$.

5 Foglio 5: Permutazioni e determinante

Esercizio 31. Considera in S_6 la permutazione

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6).$$

Calcola il segno, la scomposizione in cicli disgiunti e la scomposizione in trasposizioni delle permutazioni $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6$. Ripeti lo stesso per σ^k con $k \geq 7$.

Esercizio 32. Considera i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (2, t, -1), \quad v_3 = (t-1, 1, 0),$$

con $t \in \mathbb{R}$. Utilizzando il determinante, trova per quali valori di t si ha che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

Esercizio 33. Considera due rette (non verticali) nel piano:

$$\begin{aligned} r\colon &\quad y = mx + q \\ s\colon &\quad y = m'x + q'. \end{aligned}$$

Scrivi l'intersezione di r ed s come un sistema lineare nelle variabili (x, y) e determina la dimensione dello spazio delle soluzioni (utilizza il metodo di Gauss). Interpreta poi geometricamente i risultati.

Esercizio 34. Verifica che se $\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) \in S_n$, allora

$$\sigma^{-1} = (i_r\ i_{r-1}\ \cdots\ i_1).$$

Tenendo conto del fatto che in un gruppo non abeliano $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, calcolare l'inverso della permutazione

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9) \in S_9.$$

Calcolare infine $\mu\tau\mu^{-1}$ in cicli disgiunti, dove $\mu = (1\ 3\ 5)(1\ 2)$ e $\tau = (1\ 5\ 7\ 9)$ ancora in S_9.

Esercizio 35. Siano m, n, p numeri interi, con $n \neq 0$. Dimostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{2} \\ n & p \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Esercizio 36. Sia $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ con la seguente proprietà: la somma degli elementi di una qualunque colonna è zero. Dimostrare che A non è invertibile.

Esercizio 37 (☠).

- Sia A una matrice quadrata di ordine pari $2n \times 2n$, i cui elementi sulla diagonale sono interi pari, mentre tutti gli altri sono interi dispari. Dimostrare che il determinante di A è dispari (e quindi A è invertibile).[‡]

- Siano $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ numeri reali con la seguente proprietà: comunque se ne scelgano $2n$, è possibile dividerli in due gruppi di n elementi ciascuno in modo tale che le due somme coincidano. Dimostrare che i numeri $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ sono tutti uguali.[§]

[‡] *Suggerimento 1.* Considerare la formula di Leibniz e le permutazioni che fissano o che non fissano un elemento.

[§] *Suggerimento 2.* Utilizzare il punto precedente, assieme all'esercizio 2 del foglio 5 del prof. Zimmermann: una matrice quadrata ha rango r se e solo se esistono sottomatrici quadrate di ordine r invertibili e tutte le sottomatrici di ordine maggiore non sono invertibili.

6 Foglio 5: Determinante, autovalori

Esercizio 38. Considera la seguente matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Questa rappresenta una rotazione del piano di un angolo θ attorno all'origine.

- Calcolane il determinante. Cosa significa geometricamente il fatto che il determinante sia sempre non nullo?
- Ricorda la definizione di autovalore: $\lambda \in K$ è un autovalore per la matrice $A \in M(n \times n, K)$ se esiste un vettore v non nullo tale che
$$Av = \lambda v.$$
Geometricamente, ciò significa che la retta definita da v è mappata da A in se stessa. Sapendo che R_θ è una rotazione, per quali angoli ti aspetti che l'applicazione ammetta autovalori? In questi casi, quali autovalori ti aspetti? Risolvi poi l'equazione agli autovalori per R_θ e verifica quello che hai congetturato.

Esercizio 39. Sia A una matrice antisimmetrica di ordine n dispari, su un campo K di caratteristica diversa da 2. Dimostrare che A ha determinante nullo.

Esercizio 40.

▶ Siano $a_1, \dots, a_n$ numeri reali. Dimostra che

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}} = \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

dove

$$F_k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{k-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_k \end{vmatrix}.$$

▶ Considera poi la successione data da $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Avremo la *frazione continua*

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = \lim_n \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

dove F_k è definito come sopra, con $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che la successione F_n soddisfa la seguente relazione di ricorsione:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 3, \\ F_1 = 1, \; F_2 = 2. \end{cases}$$

Tale successione è chiamata *successione di Fibonacci*. In uno dei prossimi fogli calcoleremo il limite del rapporto $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, utilizzando la diagonalizzazione di matrici.

Esercizio 41. Sia $t \in \mathbb{R}$ e definiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t-4 \\ 2 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A è invertibile e determinarne l'inversa.

Esercizio 42. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $p \colon V \to V$ una proiezione, ovvero p è lineare e $p \circ p = p$. Utilizzando quanto dimostrato nel foglio 3, esercizio 4 (se p è una proiezione, allora $V = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$), provare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qual è il significato geometrico del valore r?

7 Foglio 7: Autovalori e autovettori

Esercizio 43. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione di asse $y = 2x$. Scegliere opportunamente una base di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che la matrice di f rispetto a tale base sia in forma diagonale.

Esercizio 44. Si consideri la seguente matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica e si stabilisca se A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{C}$. Si ripeta l'esercizio per la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 45. Sia $A \in M(n \times n, K)$ con un autovettore v relativo all'autovalore λ. Mostra che v è anche autovettore di A^2 e trova il corrispondente autovalore. Cosa si può dire di A^n, $n \in \mathbb{N}$?
Supponi ora che A sia invertibile. Dimostra che v è anche autovettore di A^{-1} e trova il corrispondente autovalore.

Esercizio 46. Sia $p\colon V \to V$ una proiezione: $p \circ p = p$. Quali sono i possibili autovalori di p? Mostra poi che ogni proiezione ha almeno un autovettore (NB: tale proprietà vale in ogni campo, non solo in quelli algebricamente chiusi).

Esercizio 47. Sia $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Dimostrare che

$$p_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\det A}\, p_A\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Dedurre quindi gli autovalori di A^{-1}, conoscendo quelli di A.

Esercizio 48. Sia $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Supponiamo di sapere che A abbia autovalori $0, 1$ e 2. Questi dati sono sufficienti per trovare due delle seguenti informazioni (dare la risposta nei due casi possibili, trovare un controesempio nel terzo):

1. il rango di A,
2. il determinante di ${}^t\!AA$,
3. gli autovalori di ${}^t\!AA$.

8 Foglio 8: Autovalori e autovettori

Esercizio 49. Sia A una matrice invertibile di ordine 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Provare che la matrice inversa è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cd} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Esercizio 50. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determinino gli autovalori di A ed una base degli autospazi. Provare che A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Si trovi una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS$ sia in forma diagonale.
Ripetere l'esercizio per

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 51. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ diagonalizzabile:

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Mostrare che per ogni m intero,

$$A^m = S \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Esercizio 52. Considerare la successione di Fibonacci (F_n) così definita:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \\ F_0 = 0, \ F_1 = 1. \end{cases}$$

Mostrare che

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare A^n, utilizziamo l'esercizio precedente: diagonalizzare A (gli autovalori sono $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$) e trovare la matrice S del cambiamento di base. Per rendere i conti più facili, consiglio di scegliere gli autovettori in modo tale che

$$S = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostrate infine che

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

e mostrare che

$$\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

Il valore $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è detto rapporto aureo. Unendo questo risultato a quello dell'esercizio 3, foglio 6, abbiamo provato che

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} = \varphi.$$

Esercizio 53. Consideriamo il seguente modello. Abbiamo una popolazione di rane ed una popolazione di mosche che convivono in un certo habitat. Controlleremo la popolazione una volta all'anno.

- Le mosche, in assenza di rane, hanno un tasso di crescita del 122%: ciò vuol dire che dopo un anno, le mosche saranno aumentate del 22%, senza contare il tasso di diminuzione dovuto alle rane. Queste ultime, predando le mosche, incidono sulla popolazione di insetti con un −36%.
- D'altra parte le rane, predandosi delle mosche, riescono ad aumentare la propria popolazione. L'impatto della presenza delle mosche è del 24%. Tuttavia, in assenza di mosche, le rane non riescono a sopravvivere e la diminuzione della popolazione di rane sarà del 62%. Ciò vuol dire che il tasso di crescita delle rane, in assenza di mosche, è del 38%.

Chiamando

$$r_n = \#\text{rane nell'anno } n, \qquad m_n = \#\text{mosche nell'anno } n,$$

avremo le relazioni

$$\begin{cases} r_n = 0.38\, r_{n-1} + 0.24\, m_{n-1} \\ m_n = -0.36\, r_{n-1} + 1.22\, m_{n-1}. \end{cases}$$

Considerando un generico valore iniziale di rane r_0 e mosche m_0, discutere come evolverà il valore delle due popolazioni. Procedere come nell'esercizio precedente: calcolare la potenza n-esima di una matrice attraverso la sua diagonalizzazione. In particolare, determinare la relazione tra r_0 ed m_0 affinché le due popolazioni continuino a crescere in equilibrio o si estinguano entrambe.

9 Foglio 9: Forma di Jordan, spazi euclidei e unitari

Esercizio 54. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3. Consideriamo l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definita da

$$f(p) = p',$$

dove l'apice indica la derivata. Notare che f è effettivamente un'applicazione lineare, poichè la derivata è lineare e manda polinomi di grado ≤ 3 in polinomi di grado ≤ 3. Scrivere la matrice di f rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e provare che la forma canonica di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Legare il fatto che la dimensione del blocco di Jordan sia 4 con l'ordine di nilpotenza di f in $\mathbb{R}_3[x]$.

Esercizio 55. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard e i vettori

$$v = (0, 3, -3), \qquad w = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}, 2, -2\right).$$

1. Calcolare le lunghezze di v e di w e l'angolo compreso.
2. Determinare la proiezione ortogonale di v su w.
3. Trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori v e w utilizzando l'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Esercizio 56. Sia V uno spazio euclideo, W un suo sottospazio di dimensione r. Sia $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots, e_r \}$ una base ortonormale di W. Dimostrare che l'applicazione $p\colon V \to V$ definita da

$$p(v) = \sum_{i=1}^{r} (v, e_i)\, e_i$$

è una proiezione (ovvero $p^2 = p$). Mostrare che $\operatorname{Im}(p) = W$ e che $\ker(p) = W^\perp$. L'applicazione p è detta *proiezione ortogonale* di V su W.

Esercizio 57. Provare che ogni matrice hermitiana $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ può essere scritta come $A = B + iC$, dove B è una matrice reale simmetrica e C è una matrice reale antisimmetrica. In particolare, trovare la decomposizione della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 58. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che A è diagonalizzabile e trovare una matrice unitaria S che la diagonalizzi.

Esercizio 59 $(*)$**.** Considera quattro matrici hermitiane 2×2:

$$I,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,$$

dove I è la matrice identità, mentre le matrici σ soddisfano la seguente relazione.[¶]

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} I.$$

Dimostra i seguenti fatti.

[¶] Una particolare terna di matrici hermitiane 2×2 che soddisfano tale relazione sono le *matrici di Pauli*:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Queste sono di fondamentale importanza in Meccanica Quantistica, dove permettono di descrivere particelle con spin.

1. Mostra che $\mathrm{tr}\,(\sigma_i) = 0$.

2. Prova che gli autovalori di σ_i sono ± 1 e che $\det(\sigma_i) = -1$.

3. Dimostra che le quattro matrici sono linearmente indipendenti e, quindi, formano una base dello spazio $M(2 \times 2, \mathbb{C})$.

4. Dal punto precedente sappiamo che per ogni $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ esistono $m_i \in \mathbb{C}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ tali che
$$A = m_0 I + \sum_{i=1}^{3} m_i \sigma_i.$$
Trovare l'espressione di m_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ in termini di A e delle matrici σ.